Criterio del rapporto

Sia $\sum_{1}^{n} a_n$ una serie a termini positivi, se:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$ con **h<1** allora la serie $\sum_{1}^{n} a_n$ è convergente

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$ con **h>1** allora la serie $\sum_{1}^{n} a_n$ è divergente

Per h=1 caso dubbio (vedi Criterio di Raabe)

Esempio1

Stabilire se la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ è convergente.

Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)} \frac{n^n}{n!} =$$

semplifichiamo (n+1)! con n! si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

La quantità $\frac{1}{e} < 1$, allora per il criterio del rapporto la serie data è convergente.

Esempio 2

Studiare la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Per x =1 la serie diventa $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; tale serie è convergente.

Per x qualunque, sfruttiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1$$

Dunque la serie è convergente.

Esempio 3

Studiare la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$

Calcoliamoci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}(n+1)}{(n+2)} \frac{(n+1)}{nx^n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} = x$$

Per x = 0 il limite delle s_n è uguale a 0 pertanto la serie è convergente.

Per x =1 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, allora la serie non è convergente,infatti il termine generale

$a_n = \frac{(n+1)x^n}{n}$ non è infinitesimo per n che tende all'infinito.

Per x<1 la serie è convergente, per x>1 è divergente.

Esempio 4

Studiare la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{3^n}$

Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)(n+4)}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)(n+3)}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(n+1)(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} \cdot \lim_{x\to\infty} 3^{n-n-1} = \frac{1}{3} < 1$$

Dunque la serie è convergente.